

Mecklenburg-Vorpommern



Nachname, Vorname des Prüflings:

Musterabitur 2024

Mathematik (CAS)

Grundkurs

Prüfungsteil B - komplexe Aufgaben

Hinweise für den Prüfling

Aufgabenbearbeitung:

Der Prüfungsteil B beinhaltet eine Pflichtaufgabe (Aufgabe 1) und zwei Wahlaufgaben (Aufgaben 2 und 3). Bearbeiten Sie die Pflichtaufgabe und eine der Wahlaufgaben.

Sofern ein entsprechender Hinweis in einer Teilaufgabe gegeben wird, sollen graphische Darstellungen im vorliegenden Aufgabendokument angefertigt werden, andernfalls verwenden Sie bitte bereitgestelltes Papier bzw. Millimeterpapier.

Beginnen Sie die Bearbeitung dieses Prüfungsteils B mit dem Eintragen Ihres Namens und Ihres Vornamens auf dem Deckblatt. Geben Sie auf der Reinschrift Ihren Namen sowie die bearbeitete Wahlaufgabe an und nummerieren Sie die Seiten Ihrer Arbeit fortlaufend.

Bearbeitungszeit:

Die Bearbeitungszeit für die Prüfungsteile A und B beträgt einschließlich Auswahlzeit 255 Minuten.

Nach Abgabe des Prüfungsteils A steht Ihnen der verbleibende Zeitraum für die Bearbeitung dieses Prüfungsteils B zur Verfügung.

Hilfsmittel:

Folgende Hilfsmittel stehen zur Verfügung:

- ein an der Schule eingeführtes Tafelwerk,
- ein an der Schule zugelassenes Computeralgebrasystem (CAS),
- Zeichengeräte,
- ein Wörterbuch der deutschen Rechtschreibung in gedruckter oder digitaler Form,
- zweisprachiges Wörterbuch in gedruckter oder digitaler Form für Prüflinge mit nichtdeutscher Herkunftssprache.

Bewertung:

Die Lösungen sind in einer sprachlich korrekten, mathematisch exakten und äußerlich einwandfreien Form darzustellen. In der Niederschrift müssen die Lösungswege nachvollziehbar sein.

In der Aufgabe 1 zur Analysis sind 35 Bewertungseinheiten erreichbar, in den Aufgaben 2 (Analysis und Geometrie) und 3 (Geometrie) sind es jeweils 20 Bewertungseinheiten.

Maximal zwei Bewertungseinheiten können zusätzlich vergeben werden bei guter Notation und Darstellung sowie eleganten, kreativen und rationellen Lösungswegen.

Maximal zwei Bewertungseinheiten können bei mehrfachen Formverstößen abgezogen werden.

1 Pflichtaufgabe Analysis

Gegeben ist die in \mathbb{R} definierte ganzrationale Funktion f . Der Graph von f wird mit G_f bezeichnet.

- 1.1 Die Funktion f hat die Form $f(x) = a \cdot x^4 + b \cdot x^3 + c \cdot x^2 + d \cdot x + e$. Ihr Graph G_f besitzt folgende Eigenschaften: 4 BE

- G_f verläuft durch die Punkte $A(-2 \mid 8)$ und $B\left(1 \mid \frac{5}{16}\right)$.
- Im Punkt $C(2 \mid 0)$ hat G_f einen Wendepunkt.
- Die Tangente an G_f im Punkt A hat die Gleichung $y = -2x + 4$.

Bestimmen Sie eine Gleichung der Funktion g .

$$\text{Zur Kontrolle: } f(x) = \left(2 + \frac{x}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{x}{2}\right)^3$$

- 1.2 Geben Sie die Koordinaten der Schnittpunkte von G_f mit den Koordinatenachsen an. 2 BE

- 1.3 $W_1(2 \mid 0)$ ist ein Wendepunkt von G_f . Weisen Sie rechnerisch nach, dass auch 3 BE

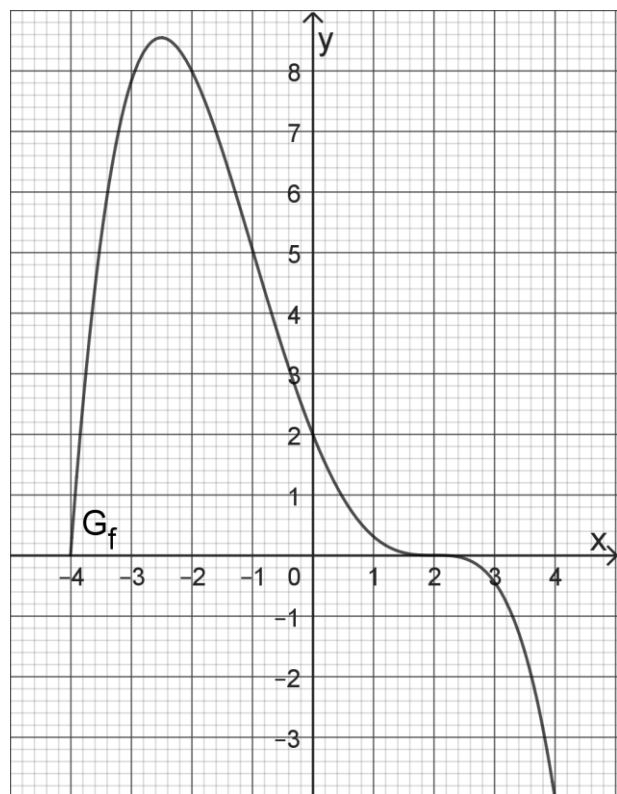
$W_2\left(-1 \mid \frac{81}{16}\right)$ ein Wendepunkt von G_f ist und dass G_f keine weiteren Wendepunkte hat.

Die Gerade g verläuft durch W_1 und W_2 .

- 1.4 Die Abbildung zeigt G_f für $-4 \leq x \leq 4$ im Koordinatensystem. Zeichnen Sie g in dieses Koordinatensystem ein und weisen Sie nach, dass g durch die Gleichung $y = -\frac{27}{16}x + \frac{27}{8}$ dargestellt wird. 3 BE

- 1.5 G_f und g schließen drei Flächenstücke ein. 4 BE

Zeigen Sie, dass die Summe der Inhalte zweier dieser Flächenstücke ebenso groß ist wie der Inhalt des dritten.



- 1.6 Ermitteln Sie rechnerisch die Anzahl der Geraden, die parallel zu g sind und G_f berühren. 3 BE

Im Längsschnitt eines Berghangs kann dessen Profillinie für $-5 \leq x \leq 4$ modellhaft durch den Graphen der in \mathbb{R} definierten Funktion h mit $h(x) = \frac{1}{4} \cdot f\left(\frac{1}{2} \cdot x\right)$, d. h. $h(x) = \frac{1}{1024} \cdot (8+x) \cdot (4-x)^3$, beschrieben werden. Es soll davon ausgegangen werden, dass der Hang in Querrichtung nicht geneigt ist. Im verwendeten Koordinatensystem beschreibt die x -Achse die Horizontale; eine Längeneinheit entspricht 100 Metern in der Wirklichkeit

- 1.7 Der Hochpunkt des Graphen von h hat die x -Koordinate -5 . Geben Sie die zugehörige y -Koordinate an und stellen Sie die Profillinie des Hangs in einem Koordinatensystem graphisch dar. 2 BE
- 1.8 Beschreiben Sie, wie der Graph von h aus dem Graphen von f erzeugt werden kann. 2 BE
- 1.9 Zeigen Sie rechnerisch, dass der Höhenunterschied zwischen dem höchsten und tiefsten Punkt des Hangs etwa 214 m beträgt. Ermitteln Sie das durchschnittliche Gefälle zwischen diesen beiden Punkten in Prozent 4 BE
- 1.10 Der Hang wird als Skipiste genutzt. Der Tabelle kann der Zusammenhang zwischen dem Schwierigkeitsgrad von Skipisten und deren jeweiligem maximalen Gefälle entnommen werden: 3 BE

Schwierigkeitsgrad	leicht	mittel	schwer
maximales Gefälle	bis 25 %	bis 40 %	mehr als 40 %

Ermitteln Sie den Schwierigkeitsgrad der hier betrachteten Piste.

- 1.11 Am höchsten Punkt des Hangs steht ein Turm mit einer Höhe von 25 m. Es gibt zwei Abschnitte des Hangs, in denen der Turm vom Boden aus zumindest teilweise sichtbar ist. Ermitteln Sie die Lage des höher gelegenen der beiden Abschnitte. 5 BE

Hinweis: Von den Wahlaufgaben 2 und 3 ist **eine** zu bearbeiten.

2 Wahlaufgabe Analysis und Analytische Geometrie

2.1 Gegeben ist die Funktionenschar $f_t(x) = (x^2 - t \cdot x) \cdot e^x$ mit $x, t \in \mathbb{R}$.

2.1.1 Zeigen Sie, dass die Graphen von f_t für alle Werte von t durch den Koordinatenursprung verlaufen. 1 BE

2.1.2 Zeichnen Sie den Graph von f_2 im Intervall $-5 \leq x \leq 2$ in ein Koordinatensystem. 2 BE

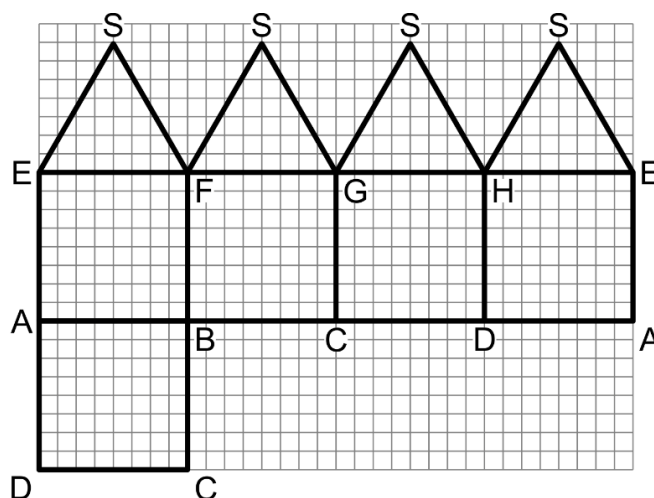
2.1.3 Für alle Werte von t hat der Graph von f_t einen Hochpunkt. Bestimmen Sie den zugehörigen Wert von t so, dass der Hochpunkt die x -Koordinate -3 hat. 2 BE

2.1.4 Das Dreieck mit den Eckpunkten $A(0 | 0)$, $B(a | 0)$ und $C(a | f_2(a))$ hat den Flächeninhalt 2024. Berechnen Sie einen Näherungswert von a . 3 BE

2.1.5 Für einen Wert von t gibt es nur eine Tangente an den Graphen von f_t , die eine Ursprungsgerade ist. Ermitteln Sie diesen Wert von t . 2 BE

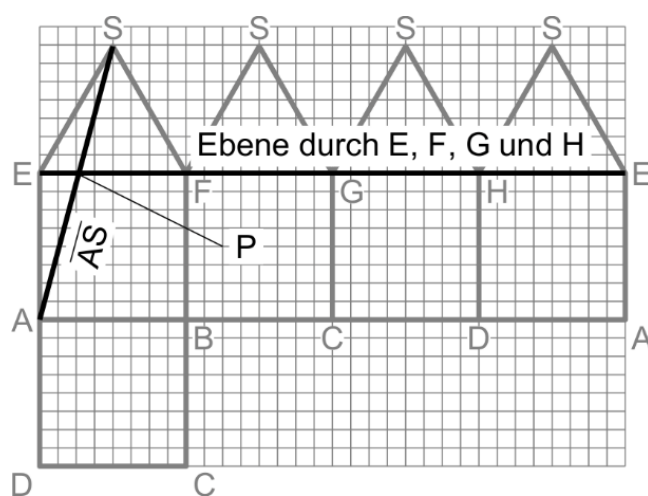
2.2 Die „verlängerte Quadratpyramide“ ist ein geometrischer Körper. Sie wird durch fünf Quadrate und vier gleichseitige Dreiecke begrenzt. Alle neun Seitenflächen haben dieselbe Kantenlänge.

Die folgende Abbildung zeigt das Netz der verlängerten Quadratpyramide Q mit der Kantenlänge $a = 4$.



- 2.2.1 Berechnen Sie den Oberflächeninhalt von Q. 3 BE
- 2.2.2 Bestimmen Sie geeignete Koordinaten für die Eckpunkte von Q und stellen Sie Q in einem dreidimensionalen Koordinatensystem dar. 5 BE
- 2.2.3 Die Strecke \overline{AS} durchstößt die Ebene, in der die Punkte E, F, G und H liegen, im Punkt P. 2 BE

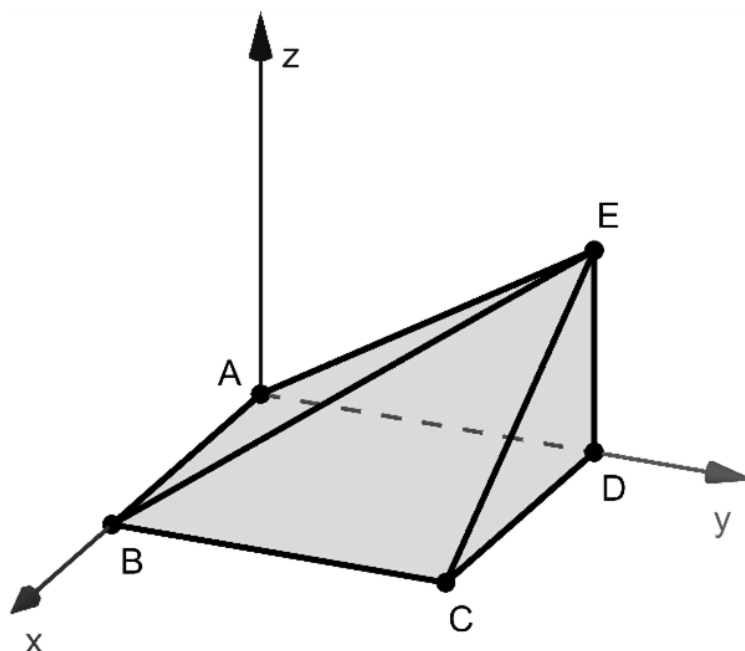
Nachdem Karim geeignete Koordinaten der Eckpunkte von Q bestimmt hat, möchte er die Koordinaten von P graphisch mit Hilfe des Netzes bestimmen. Die Abbildung zeigt seinen Ansatz. Begründen Sie, warum Karims Ansatz nicht geeignet ist.



3 Wahlaufgabe Analytische Geometrie

Die Eckpunkte eines Holzkörpers werden durch $A(0|0|0)$, $B(10|0|0)$, $C(10|10|0)$, $D(0|10|0)$ und $E(0|10|6)$ dargestellt (vgl. Abbildung). Die Punkte B , D und E liegen im Modell in der Symmetrieebene des Körpers.

Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht einem Zentimeter in der Realität.



- 3.1 Zeigen Sie, dass das Dreieck BCE rechtwinklig ist, und berechnen Sie den Inhalt der Oberfläche des Holzkörpers. 5 BE
- 3.2 Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene L, in der das Dreieck BCE liegt, in Koordinatenform. 3 BE
- 3.3 Die quadratische Grundfläche des Holzkörpers schließt mit der Seitenfläche, die durch das Dreieck BCE dargestellt wird, einen Winkel ein. Berechnen Sie die Größe dieses Winkels. 2 BE

- 3.4 Der Holzkörper soll mit einer möglichst kurzen Linie versehen werden, die im Modell vom Eckpunkt A über die Kante \overline{BE} zum Punkt C verläuft. Die Länge dieser Linie in Zentimetern kann folgendermaßen ermittelt werden: 4 BE

$$P(10 - 10t | 10t | 6t)$$

$$\overline{PC} \circ \overline{PB} = 0 \Leftrightarrow t = \frac{25}{59}$$

$$2 \cdot |\overline{PC}| \approx 15,2$$

Erläutern Sie dieses Vorgehen.

- 3.5 Der Schnittpunkt der Ebene L mit der z-Achse wird mit F bezeichnet.

- 3.5.1 Zeichnen Sie F sowie die Geraden, in denen L die xz- und die yz-Ebene schneidet, in die Abbildung ein. 2 BE

- 3.5.2 Ermitteln Sie, um wie viel Prozent das Volumen des Körpers ABCDEF größer ist als das Volumen des Körpers ABCDE, ohne für diese Volumina konkrete Werte zu berechnen. 4 BE