

Mecklenburg-Vorpommern



Nachname, Vorname des Prüflings:

Musterabitur 2024

Mathematik (WTR)

Leistungskurs

Prüfungsteil B - komplexe Aufgaben

Hinweise für den Prüfling

Aufgabenbearbeitung:

Der Prüfungsteil B beinhaltet

- zwei Pflichtaufgaben (Aufgabe 1 zur Analysis und Aufgabe 2 zur Stochastik) und
- zwei Wahlaufgaben (Aufgaben 3 und 4 zur Analytischen Geometrie).

Bearbeiten Sie die zwei Pflichtaufgaben und eine der Wahlaufgaben.

Sofern ein entsprechender Hinweis in einer Teilaufgabe gegeben wird, sollen graphische Darstellungen im vorliegenden Aufgabendokument angefertigt werden, andernfalls verwenden Sie bitte bereitgestelltes Papier bzw. Millimeterpapier.

Beginnen Sie die Bearbeitung dieses Prüfungsteils B mit dem Eintragen Ihres Namens und Ihres Vornamens auf dem Deckblatt. Geben Sie auf der Reinschrift Ihren Namen sowie die bearbeitete Wahlaufgabe an und nummerieren Sie die Seiten Ihrer Arbeit fortlaufend.

Bearbeitungszeit:

Die Bearbeitungszeit für die Prüfungsteile A und B beträgt einschließlich Auswahlzeit 330 Minuten.

Nach Abgabe des Prüfungsteils A steht Ihnen der verbleibende Zeitraum für die Bearbeitung dieses Prüfungsteils B zur Verfügung.

Hilfsmittel:

Folgende Hilfsmittel stehen zur Verfügung:

- ein an der Schule eingeführtes Tafelwerk,
- ein an der Schule zugelassener wissenschaftlicher Taschenrechner (WTR), der nicht programmierbar und nicht grafikfähig ist und nicht über Möglichkeiten der numerischen Differentiation oder Integration oder des automatischen Lösens von Gleichungen verfügt,
- Zeichengeräte,
- ein Wörterbuch der deutschen Rechtschreibung in gedruckter oder digitaler Form,
- zweisprachiges Wörterbuch in gedruckter oder digitaler Form für Prüflinge mit nichtdeutscher Herkunftssprache.

Bewertung:

Die Lösungen sind in einer sprachlich korrekten, mathematisch exakten und äußerlich einwandfreien Form darzustellen. In der Niederschrift müssen die Lösungswege nachvollziehbar sein.

In der Aufgabe 1 zur Analysis sind 40 Bewertungseinheiten erreichbar, in der Aufgabe 2 (Stochastik) und in den Wahlaufgaben 3 und 4 (Geometrie) sind es jeweils 25 Bewertungseinheiten.

Maximal zwei Bewertungseinheiten können zusätzlich vergeben werden bei guter Notation und Darstellung sowie eleganten, kreativen und rationellen Lösungswegen.

Maximal zwei Bewertungseinheiten können bei mehrfachen Formverstößen abgezogen werden.

1 Analysis - Pflichtaufgabe

Die Abbildung 1 zeigt modellhaft den Längsschnitt einer dreiteiligen Brücke aus Holz für eine Spielzeugeisenbahn. Die Züge können sowohl über die Brücke fahren als auch darunter hindurch.

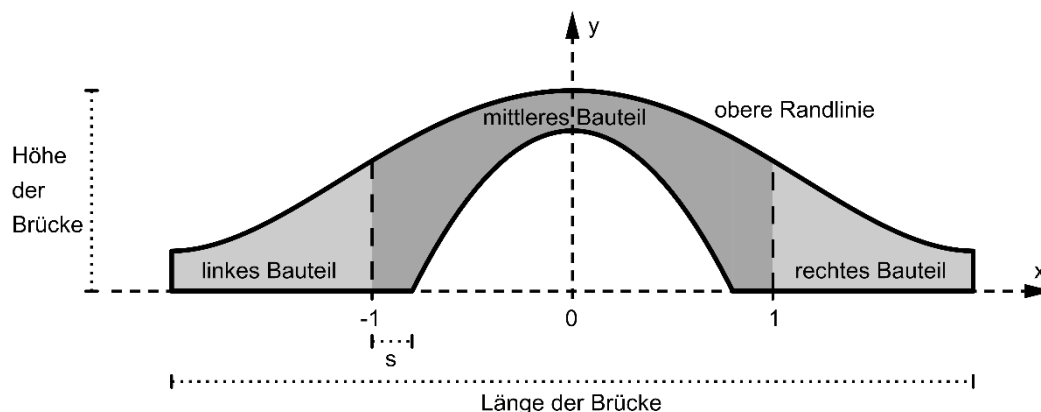


Abbildung 1

Die obere Randlinie des Längsschnitts der Brücke kann mithilfe des Graphen der in \mathbb{R} definierten Funktion $f(x) = \frac{1}{20}x^4 - \frac{2}{5}x^2 + 1$ beschrieben werden. Dabei werden die Endpunkte dieser Randlinie durch die beiden Tiefpunkte des Graphen von f dargestellt. Im verwendeten Koordinatensystem beschreibt die x -Achse die Horizontale; eine Längeneinheit entspricht einem Dezimeter in der Realität.

- 1.1 Zeigen Sie rechnerisch, dass die obere Randlinie achsensymmetrisch ist. 2 BE
- 1.2 Bestimmen Sie rechnerisch die Höhe und die Länge der Brücke. 5 BE
zur Kontrolle: Ein Tiefpunkt des Graphen von f hat die x -Koordinate 2.
- 1.3 Betrachtet wird derjenige Punkt der oberen Randlinie, der sich am Übergang vom mittleren zum rechten Bauteil befindet. 3 BE
 Prüfen Sie, ob dieser Punkt auf halber Höhe zwischen dem höchsten Punkt der oberen Randlinie und deren rechtem Endpunkt liegt.
- 1.4 Geben Sie die Bedeutung des Terms $\frac{f(2) - f(1)}{2 - 1}$ im Sachzusammenhang an und berechnen Sie seinen Wert. 2 BE

- 1.5 Berechnen Sie die Größe des größten Steigungswinkels der Brücke, der beim Überfahren zu überwinden ist. 5 BE
- 1.6 Der parabelförmige Teil der unteren Randlinie des Längsschnitts der Brücke kann mithilfe des Graphen einer in \mathbb{R} definierten Funktion $q(x) = 0,8 - a \cdot x^2$ mit $a \in \mathbb{R}^+$ beschrieben werden.
- 1.6.1 In der Abbildung 1 ist die Länge einer der beiden Bodenflächen des mittleren Bauteils mit s bezeichnet. Bestimmen Sie alle Werte von a , die für diese Länge mindestens 0,1 dm liefern. 4 BE
- 1.6.2 Begründen Sie im Sachzusammenhang, dass für die Beschreibung der unteren Randlinie beliebig große Werte von a nicht infrage kommen. 2 BE
- 1.6.3 Für die Brücke gilt $a = 1,25$. Die drei Bauteile der Brücke werden aus massivem Holz hergestellt; 1dm^3 des Holzes hat eine Masse von 800 Gramm. Die Brücke ist 0,4 dm breit. Ermitteln Sie die Masse des mittleren Bauteils. 7 BE
- 1.7 Während der Planung der Brückenform kamen zur Beschreibung der oberen Randlinie für das linke Bauteil eine Funktion g_ℓ und für das rechte Bauteil eine Funktion g_r infrage. Auch bei Verwendung dieser Funktionen wäre die obere Randlinie achsensymmetrisch gewesen. Beurteilen Sie jede der folgenden Aussagen: 4 BE
- I $-g_\ell(x) = g_r(-x)$ für $-2 \leq x \leq -1$
- II $g_\ell(x-1) = g_r(-x+1)$ für $-1 \leq x \leq 0$
- 1.8 Die Form und die Größe der Brücke werden verändert, indem im bisher verwendeten Modell die obere Randlinie des Längsschnitts mithilfe der in \mathbb{R} definierten Funktion $k(x) = \frac{3}{5} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3}x\right) + \frac{4}{5}$ beschrieben wird. Die Bauteile der veränderten Brücke lassen sich nach dem in der Abbildung 2 dargestellten Prinzip aus einem quaderförmigen Holzblock sägen. Der beim Sägen auftretende Materialverlust soll im Folgenden vernachlässigt werden.

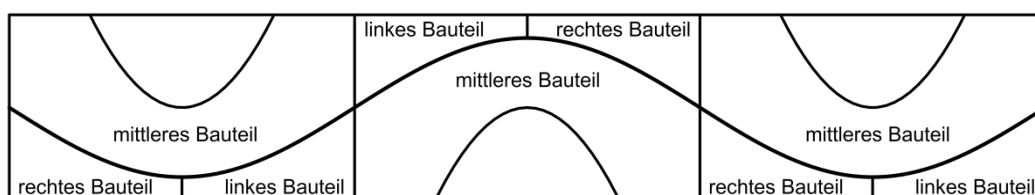


Abbildung 2

-
- 1.8.1 Der Graph von k ist symmetrisch bezüglich jedes seiner Wendepunkte. 2 BE
Beschreiben Sie, wie diese Eigenschaft mit dem in der Abbildung 2 dargestellten Prinzip zusammenhängt.
- 1.8.2 Ermitteln Sie mithilfe des Funktionsterms von k den Flächeninhalt der gesamten in der Abbildung 2 gezeigten rechteckigen Vorderseite des Holzblocks. 4 BE

2 Stochastik - Pflichtaufgabe

Unter den Versicherten eines Krankenversicherungsunternehmens haben 59 % Datenschutzbedenken (D). Einige der Versicherten nutzen ein Fitnessarmband (F). Von den Versicherten mit Datenschutzbedenken nutzen 23 % ein Fitnessarmband. 19 % aller Versicherten haben keine Datenschutzbedenken und nutzen ein Fitnessarmband.

- 2.1 Stellen Sie den Sachverhalt in einer vollständig ausgefüllten Vierfeldertafel dar. 3 BE
- 2.2 Unter allen Versicherten wird eine Person zufällig ausgewählt. 2 BE
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sie ein Fitnessarmband nutzt oder Datenschutzbedenken hat.
- 2.3 Eine unter allen Versicherten zufällig ausgewählte Person nutzt ein Fitnessarmband. 3 BE
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sie Datenschutzbedenken hat.
- 2.4 Die Zahl 0,23 und der Term $0,59 \cdot 0,23 + 0,19$ geben Wahrscheinlichkeiten im Sachzusammenhang an. Es gilt: $0,23 \neq 0,59 \cdot 0,23 + 0,19$. 3 BE
Begründen Sie damit, dass die Ereignisse D und F stochastisch nicht unabhängig sind.
- 100 Kunden des Unternehmens werden zufällig ausgewählt. Die Zufallsgröße X beschreibt die Anzahl der zufällig ausgewählten Kunden mit Datenschutzbedenken.
- 2.5 Begründen Sie, dass nachfolgend eine Binomialverteilung genutzt werden kann um Vorhersagen dazu zu treffen. 3 BE
Beschreiben Sie außerdem eine Bedingung, unter der diese Annahme nicht getroffen werden kann.
- 2.6 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass 3 BE
- weniger als 60 der ausgewählten Versicherten Datenschutzbedenken haben;
 - mindestens die Hälfte und höchstens 64 der ausgewählten Versicherten Datenschutzbedenken haben.
- 2.7 Eine Petition benötigt die Stimmen von 3 000 Personen mit Datenschutzbedenken. 3 BE
Bestimmen Sie, wie viele Personen befragt werden müssen, um mindestens 3 000 Personen mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 98 % zu finden.

- 2.8 In einer Kiste mit Eiern sind drei Viertel braun, alle anderen Eier sind weiß. Die Zufallsgröße X beschreibt die Anzahl brauner Eier unter den Bio-Eiern und wird im Folgenden als binomialverteilt angenommen. 5 BE

Nun werden n Eier zufällig ausgewählt. Die Wahrscheinlichkeit, dass genau zwei dieser Eier weiß sind, ist viermal so groß wie die Wahrscheinlichkeit, dass alle Eier braun sind. Berechnen Sie den Wert für n .

Hinweis: Von den folgenden Wahlaufgaben 3 und 4 ist **eine** zu bearbeiten.

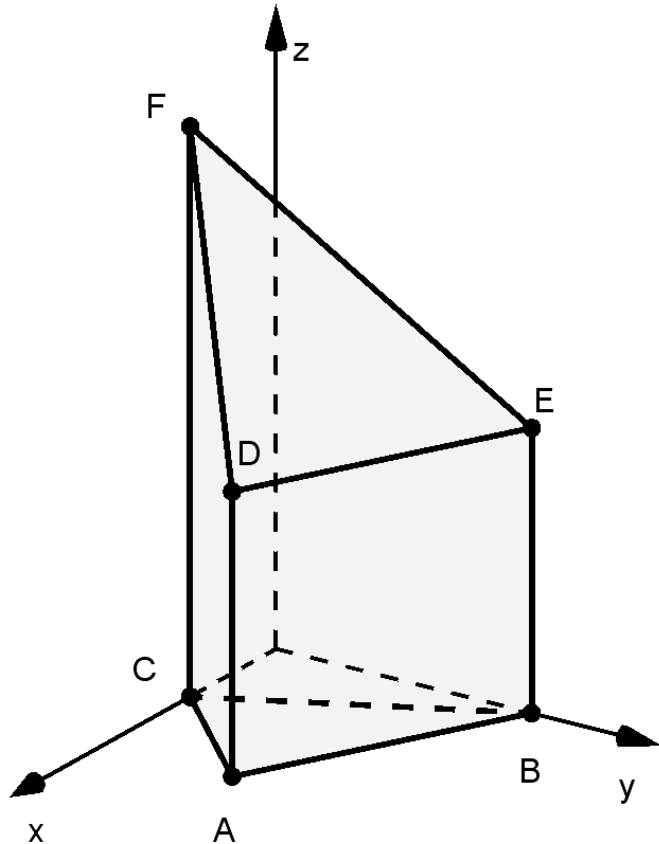
3 Analytische Geometrie - Wahlaufgabe

Die Abbildung zeigt den Körper ABCDEF mit $A(6|3|0)$, $B(0|6|0)$, $C(3|0|0)$, $D(6|3|6)$, $E(0|6|6)$ und $F(3|0|12)$.

- 3.1 Die Punkte D, E und F liegen in der Ebene L. Ermitteln Sie eine Gleichung von L in Koordinatenform.

zur Kontrolle: $2x + 4y + 3z - 42 = 0$

- 3.2 Bestimmen Sie die Größe des Winkels, den L mit der xy-Ebene einschließt.



- 3.3 Der Flächeninhalt des Dreiecks ABC kann mit dem Term $6 \cdot 6 - \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 6$ berechnet werden. Veranschaulichen Sie diese Tatsache durch geeignete Eintragungen in der Abbildung.

- 3.4 Berechnen Sie das Volumen des Körpers ABCDEF.

- 3.5 Die Ebene N_k enthält die z-Achse und den Punkt $P_k(1-k|k|0)$ mit $k \in]0;1[$. Welche Kanten des Körpers von N_k geschnitten werden, ist abhängig von k. Durchläuft k alle Werte zwischen 0 und 1, so gibt es Bereiche $]a;b[$, für die N_k für alle Werte von $k \in]a;b[$ jeweils die gleichen Kanten des Körpers schneidet.

Bestimmen Sie den größten dieser Bereiche und geben Sie die zugehörigen Kanten an.

4 BE

3 BE

3 BE

3 BE

4 BE

3.6 Auf der Kante \overline{AD} liegt der Punkt Q, auf der Kante \overline{BE} der Punkt R(0|6|2). Das Dreieck FQR hat in Q einen rechten Winkel. 5 BE

Bestimmen Sie die z-Koordinate von Q.

3.7 Der Körper wird so um die Gerade AB gedreht, dass der mit D bezeichnete Eckpunkt nach der Drehung in der xy-Ebene liegt und dabei eine positive y-Koordinate hat. Die folgenden Rechnungen liefern die Lösung einer Aufgabe im Zusammenhang mit der beschriebenen Drehung: 3 BE

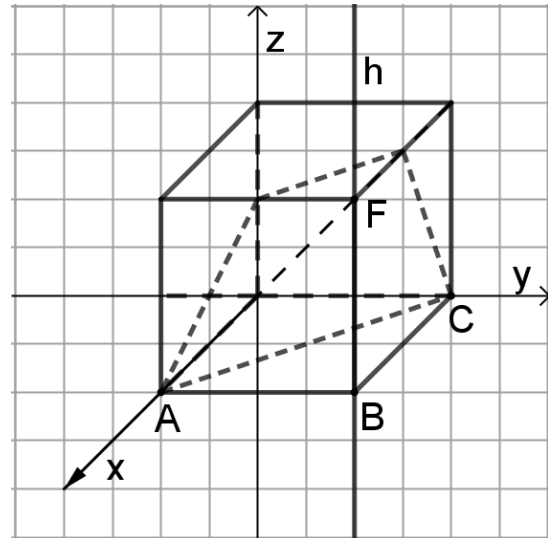
$$\begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0,8, \text{ d. h. } S(4,8|3,6|0)$$

$$\overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OS} + |\overrightarrow{CS}| \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Formulieren Sie eine passende Aufgabenstellung und geben Sie die Bedeutung von S an.

4 Analytische Geometrie – Wahlaufgabe

Die Punkte $A(4|0|0)$, $B(4|4|0)$, $C(0|4|0)$ und $F(4|4|3)$ sind Eckpunkte des abgebildeten Quaders. Die Gerade h verläuft durch B und F .



4.1 Begründen Sie, dass das Dreieck ABC rechtwinklig und gleichschenkelig ist. Geben Sie den Flächeninhalt dieses Dreiecks an.

3 BE

4.2 Geben Sie eine Gleichung der Gerade an, die durch A und C verläuft. Begründen Sie, dass diese Gerade windschief zur Gerade h ist.

3 BE

Die Punkte der Gerade h lassen sich durch $P_t(4|4|t)$ mit $t \in \mathbb{R}$ darstellen. Für jeden Wert von t liegen A , C und P_t in der Ebene $E_t: t \cdot x + t \cdot y - 4z - 4t = 0$.

4.3 Ermitteln Sie diejenigen Werte von t , für die die zugehörige Ebene E_t mit der xy -Ebene einen Winkel der Größe 60° einschließt.

4 BE

Der abgebildete Quader wird durch eine der Ebenen E_t in zwei Teilkörper zerlegt. Die Kanten der Schnittfigur dieser Ebene und des Quaders sind in der Abbildung gepunktet dargestellt.

4.4 Beschreiben Sie, wie man mithilfe der Abbildung ermitteln kann, dass $t = 6$ ist.

3 BE

4.5 Berechnen Sie das Volumen desjenigen der beiden Teilkörper, zu dem der Punkt B gehört, und erläutern Sie Ihr Vorgehen.

5 BE

4.6 Es gibt Werte von t , für die die Schnittfigur des Quaders und der Ebene E_t die Form eines Dreiecks hat. Geben Sie alle diese Werte von t an und beschreiben Sie in Abhängigkeit von t die Lage der Eckpunkte des Dreiecks.

4 BE

4.7 Die folgende Aussage stellt die Lösung einer Aufgabe im Zusammenhang mit den bisher betrachteten geometrischen Objekten dar

3 BE

$$\left| \frac{t \cdot 4 + t \cdot 4 - 4 \cdot 0 - 4t}{\sqrt{t^2 + t^2 + 16}} \right| = 2 \Leftrightarrow t = -2\sqrt{2} \vee t = 2\sqrt{2}$$

Formulieren Sie eine dazu passende Aufgabenstellung.